

## Beschreibung der Kernkompetenzen in Mathematik (Teil Analysis)

Themen	Mindestkompetenzen
<b>1. Grundlagen</b>	
1.1 Aussagen und Aussageformen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Unterschied zwischen Aussagen und Aussageformen definieren können</li> <li>• Wahrheitswerte von Aussagen angeben können</li> <li>• Zahlbereiche unterscheiden können</li> <li>• mit (Absolut-)Beträgen, linearen und quadratischen Gleichungen rechnen können,</li> <li>• dabei den Satz von Vieta, die Lösungsformeln und die quadratische Ergänzung wiedergeben und anwenden</li> </ul>
1.2 Vollständige Induktion	<ul style="list-style-type: none"> <li>• erklären können, welche Bedeutung Beweise in der Mathematik haben</li> <li>• Vollständige Induktion als Beweisverfahren durchführen können</li> <li>• auf Summen, rekursive Folgen und Teilbarkeitsbeziehungen anwenden können</li> <li>• geometrische Summenformel kennen und anwenden können</li> <li>• das Pascalsche Dreieck aufschreiben und auf Binome anwenden können</li> <li>• den Bezug zu Binomialkoeffizienten kennen</li> </ul>
1.3 Reelle Funktionen und Graphen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funktionen definieren können</li> <li>• Definitions- und Wertebereich berechnen /graphisch ermitteln können</li> <li>• Symmetrie und (strenge) Monotonie bei einfachen Funktionen nachweisen können</li> <li>• einfache Graphen skizzieren können</li> <li>• Graphen, die durch Verschiebung, Spiegelung und / oder Streckung / Stauchung entstehen skizzieren können</li> </ul>
1.4 Bijektivität	<ul style="list-style-type: none"> <li>• die Fachbegriffe injektiv, surjektiv und bijektiv definieren können</li> <li>• Beziehung zwischen Monotonie und Injektivität angeben können</li> <li>• Umkehrfunktionen bei einfachen Funktionen berechnen können</li> </ul>

<b>2. Trigonometrie</b>	
2.1 Trigonometrie	<ul style="list-style-type: none"> <li>• trigonometrische Funktionen am Dreieck definieren können</li> <li>• Aufgaben am Dreieck berechnen können</li> <li>• Winkelmaße (Bogenmaß und Gradmaß) unterscheiden können</li> <li>• Einfache Aufgaben mit dem Sinussatz berechnen können</li> </ul>
2.2 Trigonometrische Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• trigonometrische Funktionen am Einheitskreis definieren und darstellen können</li> <li>• Graphen skizzieren können</li> <li>• Symmetrie und Periodizität definieren und berechnen können</li> </ul>
2.4 Die allgemeine Sinusfunktion	<ul style="list-style-type: none"> <li>• allgemeine Schwingungen modellieren und darstellen können</li> </ul>
2.5 Zyklometrische Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Arcusfunktionen definieren und graphisch darstellen können</li> </ul>
2.6 Goniometrische Gleichungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Additionstheoreme kennen und anwenden können</li> <li>• goniometrische Gleichungen mit Substitutionen umformen und lösen können</li> </ul>
<b>3. Konvergenz von Folgen und Funktionen</b>	
3.1 Geometrisches Wachstum	<ul style="list-style-type: none"> <li>• geometrisches Wachstum erkennen, definieren und berechnen können</li> <li>• an einfachen Fraktalen anwenden können</li> <li>• Konvergenz der geometrische Reihe nachweisen können</li> <li>• periodische Dezimalzahlen berechnen können</li> <li>• rekursive und explizite Folgen unterscheiden können</li> </ul>
3.2 Definition und Eigenschaften der Konvergenz	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konvergenz definieren können (<math>\varepsilon</math>-Definition)</li> <li>• Konvergenz anhand einer Grafik veranschaulichen können</li> <li>• Konvergenzprinzipien kennen und anwenden können (z.B. Einschließungsprinzip, Vergleichsprinzip, Monotonieprinzip)</li> <li>• Grenzwertsätze anwenden und formulieren können</li> </ul>

3.3 Divergenz	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divergenz nachweisen können</li> <li>• symbolisches Rechnen mit <math>\infty</math></li> <li>• zwischen beschränkten und unbeschränkten Folgen unterscheiden können</li> </ul>
3.4 Grenzwerte von Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• formale Definition, Sätze und Eigenschaften der Folgenkonvergenz <math>n \rightarrow \infty</math> auf den Fall <math>x \rightarrow x_0 \pm</math> übertragen können</li> <li>• rechts- und linksseitige Grenzwerte definieren und berechnen können</li> </ul>
3.5 Polynome und Horner-Schema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polynome definieren und skizzieren können</li> <li>• Polynome in Linearfaktoren und irreduzible quadratische Faktoren zerlegen können (Faktorisierung)</li> <li>• Nullstellen mit Horner-Schema abspalten können.</li> <li>• Verbindung von Horner-Schema und Polynomdivision beschreiben können</li> </ul>
3.6 Rationale Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• rationale Funktionen definieren können</li> <li>• Definitionslücken in Polstellen, hebbare Lücken und Sprungstellen unterscheiden können</li> <li>• Graphen rationaler Funktionen skizzieren können</li> <li>• kleine Kurvendiskussionen durchführen können (Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Asymptotik, Graph)</li> </ul>
3.7 Stetigkeit und stetige Fortsetzung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Stetigkeit (mit Hilfe des Grenzwertes) definieren können</li> <li>• Funktionen auf stetige Fortsetzbarkeit untersuchen können</li> <li>• einseitige Stetigkeit definieren und berechnen können.</li> </ul>

<b>4. Differentialrechnung</b>	
4.1 Mittlere Änderungsrate	<ul style="list-style-type: none"> <li>• den Differenzenquotienten einer Funktion definieren und berechnen können</li> <li>• ihn als durchschnittliche Änderungsrate der Funktion interpretieren können</li> </ul>
4.2 Differenzialquotient	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten erkennen</li> <li>• differenzierbare Funktionen definieren können</li> <li>• Ableitungen bei einfachen Funktionen berechnen können</li> <li>• Potenzregel herleiten können</li> <li>• Gegenbeispiele zur Differenzierbarkeit angeben können</li> </ul>
4.3 Tangente	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Steigung der Tangente als lokale Änderungsrate der Funktion interpretieren können</li> <li>• Tangenten berechnen und grafisch darstellen können</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• numerische Näherungen berechnen können</li> <li>• Tangenten geometrisch konstruieren können</li> <li>• die Gleichung der Tangente analytisch herleiten können</li> <li>• sprachlich zwischen Schnittpunkt und Berührungspunkt unterscheiden können</li> </ul>
4.4 Ableitungsregeln	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funktionen mit den Ableitungsregeln (Summenregel, Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel) differenzieren können</li> <li>• Beweis der Ableitungsregeln mit den Grenzwertsätzen in Beziehung setzen können</li> <li>• Ableitungen von Umkehrfunktionen berechnen können</li> </ul>
4.5 Kurvendiskussionen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erweiterung der Kurvendiskussion mit Differentialrechnung: strenge Monotonie und Krümmung mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung berechnen können</li> <li>• hinreichende und notwendige Kriterien zur Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten nennen und anwenden können</li> <li>• zwischen lokalen und globalen Extrema unterscheiden können</li> <li>• Bedingungen erster und zweiter Ordnung (bei Extremwerten) anwenden können</li> <li>• zwischen Wendepunkten und Sattelpunkten unterscheiden können</li> </ul>
4.6 Koeffizientenbestimmung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• beweisen können, dass jedes Polynom dritten Grades einen Wendepunkt hat</li> <li>• „Steckbriefaufgaben“ lösen können</li> <li>• Anwendungen mathematisch modellieren können</li> </ul>

<b>5. Integralrechnung</b>	
5.1 Stammfunktion und Fläche	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integralfunktionen zur unteren Grenze als Stammfunktion deuten können</li> <li>• Stammfunktion einer integrierbaren Funktion definieren können</li> <li>• Stammfunktionen elementarer Funktionen nennen können</li> <li>• den Unterschied zwischen Fläche und Integral kennen</li> <li>• Unbestimmte und bestimmte Integrale berechnen können</li> <li>• Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen</li> <li>• Einen Bestand durch Änderungsraten berechnen können</li> </ul>
5.2 Integrationsmethoden	<ul style="list-style-type: none"> <li>• die Methode partielle Integration kennen und anwenden können, dabei zwei Strategien unterscheiden können</li> <li>• die Methode Integration durch Substitution anwenden können</li> <li>• geeignete Substitutionen finden</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Flächeninhalt des Kreises berechnen können</li> <li>• Partialbrüche zu rationalen Funktionen ansetzen können</li> <li>• Rationale Funktionen durch einfache Partialbruchzerlegung integrieren können</li> </ul>
5.3. Numerische Integration	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Riemannsches Ober-, Unter- und zentrierte Riemannsummen definieren und berechnen können</li> <li>• die Trapezsummenformel als ein weiteres numerisches Beispiel kennen und anwenden können</li> </ul>
5.4 Uneigentliche Integrale	<ul style="list-style-type: none"> <li>• bei unbeschränkten Integranden oder unbeschränkten Integrationsbereichen die Konvergenz / Divergenz eines Integrals zeigen können</li> </ul>
5.5 Integrierbarkeit – Stetigkeit - Differenzierbarkeit	<ul style="list-style-type: none"> <li>• den Begriff integrierbar definieren können</li> <li>• wissen, dass „integrierbar sein“ und „Stammfunktion haben“ unabhängig voneinander sind und dies durch Beispiele belegen können</li> <li>• wissen, dass jede stetige Funktion integrierbar ist und eine Stammfunktion hat</li> </ul>

<b>6. Exponential- und Logarithmusfunktion</b>	
6.1 Definition des natürlichen Logarithmus	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Den Logarithmus als Integral der Funktion <math>1/x</math> definieren können</li> <li>• Eigenschaften und Rechenregeln daraus ableiten können</li> <li>• Integrale berechnen können, die mit dem Logarithmus zusammenhängen</li> </ul>
6.2 Eulersche Exponentialfunktion	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Eulersche Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des Logarithmus definieren können</li> <li>• Eigenschaften und Rechenregeln herleiten können</li> <li>• beliebige Potenzen mit Hilfe der Eulerschen Basis <math>e</math> ausdrücken können</li> </ul>
6.3 Anwendungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lineares und exponentielles Wachstum vergleichen können</li> <li>• Kurvendiskussionen für Exponential- und Logarithmusfunktionen durchführen können.</li> </ul>

<b>7. Anwendungen der Differentialrechnung [ Auswahl ]</b>	
7.1 Numerisches Lösen nichtlinearer Gleichungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Das Newton-Verfahren auf nichtlineare Gleichungen anwenden können</li> <li>• Die Iteration des Newton-Verfahrens mit dem Tangentenbegriff herleiten können</li> <li>• Vor- und Nachteile des Verfahrens kennen</li> <li>• sicherer Umgang mit dem TR</li> </ul>

7.2. Der Banachsche Fixpunktsatz	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Das allgemeine Iterationsverfahren erklären können</li> <li>• Das Newton-Verfahren als Spezialfall erkennen</li> <li>• Den Banachschen Fixpunktsatz nennen können, die Begriffe Kontraktion und Selbstabbildung definieren können</li> <li>• einfache Kettenbrüche und Iterationen berechnen können</li> </ul>
7.3. Die Parabeliteration	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Parabeliteration als Beispiel einer allgemeinen Iteration kennen</li> <li>• Den Banachschen Fixpunktsatz auf die Parabeliteration anwenden können</li> </ul>
7.4. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nichtlineare Optimierungsprobleme mit Zielfunktion und Nebenbedingungen formulieren und lösen können</li> </ul>
7.5. Satz von Taylor	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Eine Reihe auf Konvergenz / Divergenz untersuchen können</li> <li>• Das Quotientenkriterium anwenden können</li> <li>• Potenzreihen (einfacher Funktionen) berechnen können</li> <li>• Funktionen durch Taylorpolynome approximieren können</li> <li>• Den Satz von Taylor kennen</li> <li>• Den Konvergenzradius einer Taylorreihe berechnen können</li> </ul>

Bemerkung:

Die Teilgebiete Analysis und Vektorrechnung werden am Studienkolleg Bochum im Verhältnis 3:1 unterrichtet.

(Stand: Mai 2015)